StudentBounty.com

नामांक Roll No.

No. of Questions — 30

No. of Printed Pages — 11

SS—15—MATHEMATICS

उच्च माध्यमिक परीक्षा, 2013

SENIOR SECONDARY EXAMINATION, 2013

गणित

MATHEMATICS

समय : $3\frac{1}{4}$ घण्टे

पूर्णांक : 80

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश :

GENERAL INSTRUCTIONS TO THE EXAMINEES :

1. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न पत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।

   Candidate must write first his / her Roll No. on the question paper compulsorily.

2. **सभी** प्रश्न करने अनिवार्य हैं।

   All the questions are compulsory.

3. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर पुस्तिका में ही लिखें।

   Write the answer to each question in the given answer-book only.

4. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड हैं, उन सभी के उत्तर एक साथ ही लिखें।

   For questions having more than one part, the answers to those parts are to be written together in continuity.

5. प्रश्न पत्र के हिन्दी व अंग्रेजी रूपान्तरण में किसी प्रकार की त्रुटि / अन्तर / विरोधाभाष होने पर हिन्दी भाषा के प्रश्न को ही सही मानें।

   If there is any error / difference / contradiction in Hindi & English versions of the question paper, the question of Hindi version should be treated valid.

StudentBounty.com

6.

खण्ड	प्रश्न संख्या	अंक प्रत्येक प्रश्न
अ	1 – 10	1
ब	11 – 25	3
स	26 – 30	5

Section	**Question Nos.**	**Marks per question**
A	1 – 10	1
B	11 – 25	3
C	26 – 30	5

7. प्रश्न संख्या 11, 13, 14, 26 और 29 में आन्तरिक विकल्प हैं। इन प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प करना है।

   There are internal choices in Q. Nos. 11, 13, 14, 26 and 29. You have to attempt only one of the alternatives in these questions.

खण्ड – अ

SECTION – A

1. $\cos\left[\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

   Find the value of $\cos\left[\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$.

2. यदि $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$, तब A^2 ज्ञात कीजिए।

   If $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$, then find A^2.

StudentBounty.com

3. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$, तब $A + A'$ ज्ञात कीजिए।

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$, then find $A + A'$.

4. मान ज्ञात कीजिए : $\int a^{3 \log_a x} \mathrm{d}x$

Evaluate : $\int a^{3 \log_a x} \mathrm{d}x$.

5. सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ का सदिश $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

Find the projection of vector $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ on a vector $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$.

6. समतल $\vec{r} . (6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 1 = 0$ के लम्बवत् इकाई सदिश की दिक्कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।

Find the direction cosines of the unit vector perpendicular to the plane $\vec{r} . (6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 1 = 0$.

7. रेखाएँ $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2P} = \frac{z-3}{2}$ और $\frac{7-7x}{3P} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ परस्पर लम्ब हैं तो P का मान ज्ञात कीजिए।

The lines $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2P} = \frac{z-3}{2}$ and $\frac{7-7x}{3P} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ are perpendicular to each other. Find the value of P.

StudentBounty.com

8. निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत सुसंगत हल क्षेत्र दर्शाइए :

$8x + 5y \leq 40$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Show the feasible solution region under the following constraints :

$8x + 5y \leq 40$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

9. यदि A और B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं, जहाँ $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ तथा $P(B) = x$ तब x का मान ज्ञात कीजिए।

If A and B are two independent events with $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ and $P(B) = x$, then find the value of x.

10. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$; $x \neq 1$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Find the general solution of differential equation $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$; $x \neq 1$.

खण्ड – ब

SECTION – B

11. यदि R तथा S समुच्चय A में तुल्यता सम्बन्ध है तब सिद्ध कीजिए कि सम्बन्ध $R \cap S$ भी एक तुल्यता सम्बन्ध है।

अथवा

धनात्मक परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q^+ में निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित * एक द्विआधारी संक्रिया है :

$$a * b = \frac{ab}{4}$$

सिद्ध कीजिए कि * क्रमविनिमेय तथा साहचर्य है। Q^+ में * का प्रतिलोम अवयव यदि कोई है तो ज्ञात कीजिए।

StudentBounty.com

If R and S are equivalence relation in a set A, then show that relation $R \cap S$ is also an equivalence relation.

OR

* be a binary operation on the set of positive rational numbers Q^+ defined as follows :

$$a * b = \frac{ab}{4}$$

Prove that * is commutative and associative. Find the inverse element for * on Q^+, if any.

12. सिद्ध कीजिए : $\frac{1}{2}\tan^{-1} x = \cos^{-1}\left\{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}\right\}^{\frac{1}{2}}$.

Prove that : $\frac{1}{2}\tan^{-1} x = \cos^{-1}\left\{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}\right\}^{\frac{1}{2}}$.

13. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$ तथा $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ है तो सिद्ध कीजिए कि $I + A = (I - A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

अथवा

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $A^2 - 5A + 7I = 0$ है तथा इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

StudentBounty.com

If $A=\begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$ and $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, then prove that $I+A=(I-A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

OR

If $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$,then prove that $A^2-5A+7I=0$ and with its help find A^{-1}.

14. यदि $y=e^{m\sin^{-1}x}$, तब सिद्ध कीजिए कि $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}-m^2y=0$.

अथवा

यदि $y=(\sin x)^{(\sin x)^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}$ है, तब सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2\cot x}{1-y\log_e \sin x}$.

If $y=e^{m\sin^{-1}x}$, then prove that $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}-m^2y=0$.

OR

If $y=(\sin x)^{(\sin x)^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}$, then prove that $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2\cot x}{1-y\log_e \sin x}$.

15. एक 28 cm लम्बे तार को दो टुकड़ों में विभक्त किया जाता है। एक टुकड़े से वर्ग तथा दूसरे से वृत्त बनाया जाता है। दोनों टुकड़ों की लम्बाइयाँ कितनी होनी चाहिए जिससे वर्ग एवं वृत्त का सम्मिलित क्षेत्रफल न्यूनतम हो ?

A wire of length 28 cm is to be cut into two pieces. One of the pieces is to be made into a square and the other into a circle. What should be the length of the two pieces so that the combined area of the square and the circle is minimum ?

StudentBounty.com

16. वक्र $2x^2 - y^2 = 14$ पर सरल रेखा $x + 3y = 6$ के समान्तर अभिलम्बों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the normals to the curve $2x^2 - y^2 = 14$ which are parallel to the line $x + 3y = 6$.

17. मान ज्ञात कीजिए : $\int \sqrt{5 - 4x - x^2}\, dx$.

Evaluate : $\int \sqrt{5 - 4x - x^2}\, dx$.

18. मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1 + \sin x)(2 + \sin x)}\, dx$.

Evaluate : $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1 + \sin x)(2 + \sin x)}\, dx$.

19. वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ एवं रेखा $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ से घिरे छोटे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area of smaller part bounded by circle $x^2 + y^2 = a^2$ and the line $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

20. रेखा $y = 3x + 2$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = -1$ एवं $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area of region bounded by the line $y = 3x + 2$, the x-axis and the ordinates $x = -1$ and $x = 1$.

StudentBounty.com

21. दो इकाई सदिशों $\hat{a}$ व $\hat{b}$ के मध्य कोण θ है तो सिद्ध कीजिए $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}|\hat{a} - \hat{b}|$.

An angle between two unit vectors $\hat{a}$ and $\hat{b}$ is θ. Then prove that $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}|\hat{a} - \hat{b}|$.

22. सदिशों $\vec{a}$ व $\vec{b}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \, |\vec{b}|^2 - |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2$.

For the vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ prove that $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \, |\vec{b}|^2 - |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2$.

23. आलेखीय विधि से निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए :

व्यवरोधों $x + 2y \le 12$

$2x + y \le 12$

$x + \frac{5}{4}y \ge 5$; $x \ge 0, y \ge 0$ के अन्तर्गत

$Z = 60x + 40y$ का अधिकतमीकरण कीजिए।

Solve the following linear programming problem graphically :

Maximize $Z = 60x + 40y$

subject to the constraints $x + 2y \le 12$

$2x + y \le 12$

$x + \frac{5}{4}y \ge 5$; $x \ge 0, y \ge 0$.

StudentBounty.com

24. एक थैले में 4 लाल और 6 काली गेंदें हैं और एक अन्य थैले में 3 लाल और 5 काली गेंदें हैं। दोनों थैलों में से एक को यादृच्छया चुना जाता है और उसमें से एक गेंद निकाली जाती है जो कि लाल है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि गेंद दूसरे थैले से निकाली गई है ?

A bag contains 4 red and 6 black balls and another bag contains 3 red and 5 black balls. One of the two bags is selected at random and a ball is drawn from the bag which is found to be red. Find the probability that the ball is drawn from the second bag.

25. एक बहु विकल्पीय परीक्षा में 5 प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक के तीन संभावित उत्तर हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि एक विद्यार्थी केवल अनुमान लगा कर चार या अधिक प्रश्नों के सही उत्तर देगा ?

In a multiple choice test with three possible answers for each of the 5 questions, what is the probability that a candidate would get four or more correct answers just by guessing ?

खण्ड – स

SECTION – C

26. सिद्ध कीजिए कि $A = \begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$.

अथवा

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ तब सत्यापित कीजिए कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

StudentBounty.com

Prove that $A = \begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$.

OR

If $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ then verify that $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

27. सिद्ध कीजिए कि $\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right] = \sqrt{a^2-x^2}$.

Prove that $\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right] = \sqrt{a^2-x^2}$.

28. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)\left[\log(x^2+1) - 2\log x\right]}{x^4} dx$.

Evaluate : $\int \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)\left[\log(x^2+1) - 2\log x\right]}{x^4} dx$.

29. अवकल समीकरण $2xy\,dy = (x^2+y^2)\,dx$ को हल कीजिए।

अथवा

अवकल समीकरण $(1+x^2)dy + 2xy\,dx = \cot x\,dx$ का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $y = 0$ यदि $x = \frac{\pi}{2}$.

StudentBounty.com

Solve the differential equation $2xy\,dy = (x^2 + y^2)\,dx$.

OR

Find a particular solution of the differential equation $(1+x^2)dy + 2xy\,dx = \cot x\,dx$, given that $y = 0$ if $x = \frac{\pi}{2}$.

30. समतलों $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) - 4 = 0$ और $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + 5 = 0$ के प्रतिच्छेदन रेखा को अंतर्विष्ट करने वाले तथा समतल $\vec{r} \cdot (5\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) + 8 = 0$ के लम्बवत् समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the plane which contains the line of intersection of the planes $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) - 4 = 0$ and $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + 5 = 0$ and which is perpendicular to the plane $\vec{r} \cdot (5\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) + 8 = 0$.