StudentBounty.com

नामांक Roll No.

No. of Questions — 24
No. of Printed Pages — 7

SS—15–1—Maths. I

उच्च माध्यमिक परीक्षा, 2011

SENIOR SECONDARY EXAMINATION, 2011

वैकल्पिक वर्ग I तथा II — कला व विज्ञान वर्ग

(OPTIONAL GROUPS I & II — HUMANITIES AND SCIENCE)

गणित — प्रथम पत्र

(MATHEMATICS — First Paper)

समय : $3\frac{1}{4}$ घण्टे

पूर्णांक : 60

परीक्षार्थियों के लिए आवश्यक निर्देश :

GENERAL INSTRUCTIONS FOR EXAMINEES :

1. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न पत्र पर नामांक अनिवार्यत: लिखें ।
   Candidate must write first his / her Roll No. on the question paper compulsorily.
2. प्रश्न पत्र के हिन्दी व अंग्रेजी रूपान्तर में किसी प्रकार की त्रुटि / अन्तर / विरोधाभास होने पर हिन्दी भाषा के प्रश्न को सही मानें ।
   If there is any error / difference / contradiction in Hindi and English versions of the Question paper, the question of Hindi version should be treated valid.
3. **सभी** प्रश्न करने अनिवार्य हैं । प्रश्न क्रमांक **21, 23** व **24** में आन्तरिक विकल्प हैं ।
   All questions are compulsory. Question Nos. **21, 23** and **24** have internal choice.
4. प्रश्न क्रमांक **2** से **7** तक अति लघूत्तरात्मक प्रश्न हैं ।
   Question Nos. **2** to **7** are Very Short Answer type.
5. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका में ही लिखें ।
   Write the answer of each question in answer-book only.

StudentBounty.com

6. जिस प्रश्न के एक से अधिक समान अंक वाले भाग हैं, उन सभी भागों का हल एक साथ सतत् लिखें ।
For questions having more than one part carrying similar marks, the answers of those parts are to be written together in continuity.

7. अपनी उत्तर-पुस्तिका के पृष्ठों के दोनों ओर लिखिए । यदि कोई रफ़ कार्य करना हो, तो उत्तर-पुस्तिका के अंतिम पृष्ठों पर करें और इन्हें तिरछी लाइनों से काटकर उन पर 'रफ़ कार्य' लिख दें ।
Write on both sides of the pages of your answer-book. If any rough work is to be done, do it on last pages of the answer-book and cross with slant lines and write 'Rough Work' on them.

8. प्रश्न क्रमांक **1** के चार भाग (i, ii, iii तथा iv) हैं । प्रत्येक भाग के उत्तर के चार विकल्प (**क, ख, ग** एवं **घ**) हैं । सही विकल्प का उत्तराक्षर उत्तर-पुस्तिका में निम्नानुसार तालिका बनाकर लिखें :
There are *four* parts (i, ii, iii and iv) in Question No. 1. Each part has *four* alternatives *A*, *B*, *C* and *D*. Write the letter of the correct alternative in the answer-book at a place by making a table as mentioned below :

प्रश्न क्रमांक Question No.	**सही उत्तर का क्रमाक्षर Correct letter of the Answer**
1. (i)	
1. (ii)	
1. (iii)	
1. (iv)	

1. (i) $P(2, 1, 3)$ तथा $Q(-4, -2, 1)$ के मध्य बिन्दु से गुजरने वाले तथा रेखा PQ के लम्बवत् समतल का समीकरण है

(क) $12x + 6y + 4z + 7 = 0$

(ख) $3(x+1) + \left(y + \frac{1}{2}\right) + (z-2) = 0$

(ग) $3x + y + z = 5$

(घ) $(2+(-4))(x+1) + (1+(-2))\left(y+\frac{1}{2}\right) + (3+1)(z-2) = 0$

The equation of the plane passing through the mid-point of $P(2, 1, 3)$ and $Q(-4, -2, 1)$ and perpendicular to the line PQ is

(A) $12x + 6y + 4z + 7 = 0$

(B) $3(x+1) + \left(y + \frac{1}{2}\right) + (z-2) = 0$

(C) $3x + y + z = 5$

(D) $(2+(-4))(x+1) + (1+(-2))\left(y+\frac{1}{2}\right) + (3+1)(z-2) = 0$

$\frac{1}{2}$

StudentBounty.com

(ii) समतल $3x + 4y + 5z = 7$ का अभिलम्ब रूप में समीकरण है

(क) $\frac{3}{7}x + \frac{4}{7}y + \frac{5}{7}z = 1$

(ख) $3x + 4y + 5z = \frac{7}{5\sqrt{2}}$

(ग) $\frac{3}{5\sqrt{2}}x + \frac{4}{5\sqrt{2}}y + \frac{5}{5\sqrt{2}}z = \frac{7}{5\sqrt{2}}$

(घ) $\frac{5\sqrt{2}}{3}x + \frac{5\sqrt{2}}{4}y + \frac{5\sqrt{2}}{5}z = \frac{7}{5\sqrt{2}}$.

The normal form of the equation of a plane $3x + 4y + 5z = 7$ is

(A) $\frac{3}{7}x + \frac{4}{7}y + \frac{5}{7}z = 1$

(B) $3x + 4y + 5z = \frac{7}{5\sqrt{2}}$

(C) $\frac{3}{5\sqrt{2}}x + \frac{4}{5\sqrt{2}}y + \frac{5}{5\sqrt{2}}z = \frac{7}{5\sqrt{2}}$

(D) $\frac{5\sqrt{2}}{3}x + \frac{5\sqrt{2}}{4}y + \frac{5\sqrt{2}}{5}z = \frac{7}{5\sqrt{2}}$. $\frac{1}{2}$

(iii) सरल रेखा में चलते हुए कण का प्रारम्भिक वेग 50 मी/सेकण्ड तथा अचर त्वरण 40 मी/सेकण्ड ^{2} है । कण का 4 सेकण्ड पश्चात् वेग है

(क) 110 मी/सेकण्ड (ख) 210 मी/सेकण्ड

(ग) – 110 मी/सेकण्ड (घ) इनमें से कोई नहीं ।

The initial velocity of a particle moving in a straight line is 50 m/sec and the uniform acceleration is 40 m/sec ^{2}. The velocity of the particle after 4 sec is

(A) 110 m/sec (B) 210 m/sec

(C) – 110 m/sec (D) none of these. $\frac{1}{2}$

(iv) 20 किग्रा के एक पिण्ड में $\frac{1}{2}$ मी/सेकण्ड ^{2} का त्वरण उत्पन्न करने के लिए जिस बल की आवश्यकता है, वह है

(क) 20 न्यूटन (ख) 980 न्यूटन

(ग) 40 न्यूटन (घ) 10 न्यूटन ।

The force needed to create an acceleration of $\frac{1}{2}$ m/sec ^{2} in a body of 20 kg is

(A) 20 newton (B) 980 newton

(C) 40 newton (D) 10 newton. $\frac{1}{2}$

2. सिद्ध कीजिए : $\sec^2\left(\tan^{-1}2\right) + \operatorname{cosec}^2\left(\cot^{-1}3\right) = 15.$

Prove that $\sec^2\left(\tan^{-1}2\right) + \operatorname{cosec}^2\left(\cot^{-1}3\right) = 15.$ 1

StudentBounty.com

3. यदि एक रेखा निर्देशी अक्षों के साथ क्रमशः α, β तथा γ कोण बनाती है, तो $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma$ का मान ज्ञात कीजिए ।
If a straight line makes angles α, β and γ respectively with the coordinate axes, then find the value of $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma$. 1

4. बिन्दु $(-1, 3, 5)$ से जाने वाली उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $x - y + 2z = 5$, $3x + y + z = 6$ के समांतर है ।
Find the equation of the straight line passing through the point $(-1, 3, 5)$ and parallel to the line $x - y + 2z = 5$, $3x + y + z = 6$. 1

5. बूलीय बीजगणित में सिद्ध कीजिए , यदि $q \cdot p = r \cdot p$, $q \cdot p' = r \cdot p'$ तो $q = r$.
In Boolean algebra, prove that if $q \cdot p = r \cdot p$, $q \cdot p' = r \cdot p'$ then $q = r$. 1

6. यदि दो इकाई सदिशों का अन्तर भी इकाई सदिश हो, तो उनके मध्य कोण ज्ञात कीजिए ।
If the difference of two unit vectors is also a unit vector, then find the angle between them. 1

7. एक समान त्वरण से गतिमान कण अपनी गति के 11 वें सेकण्ड में 720 सेमी और 15 वें सेकण्ड में 960 सेमी दूरी तय करता है । इसका प्रारम्भिक वेग व त्वरण ज्ञात कीजिए ।
A particle, moving with a uniform acceleration describes a distance of 720 cm in 11th sec and a distance of 960 cm in 15th sec. Find the initial velocity and acceleration of the particle. 1

8. समुच्चय $A = \{ x : x \leq 10, x \in N \}$ में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित किया जाता है कि $xRy \Leftrightarrow x + 2y = 10$ तो R^{-1} को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में प्रदर्शित कीजिए तथा R^{-1} का परिसर भी ज्ञात कीजिए ।
A relation R in a set $A = \{ x : x \leq 10, x \in N \}$ is defined as $xRy \Leftrightarrow x + 2y = 10$, then express R^{-1} in the form of a set of ordered pairs and also find the range of R^{-1}. 2

9. यदि $f : R \to R$, $f(x) = 2x - 3$ तथा $g : R \to R$, $g(x) = \frac{x+3}{2}$, तो सिद्ध कीजिए कि $f \circ g = g \circ f = I_R$.
If $f : R \to R$, $f(x) = 2x - 3$ and $g : R \to R$, $g(x) = \frac{x+3}{2}$, then prove that $f \circ g = g \circ f = I_R$. 2

10. यदि $a + ib = \frac{c+i}{c-i}$, जहाँ c एक वास्तविक संख्या है, तो सिद्ध कीजिए कि
(i) $a^2 + b^2 = 1$ (ii) $\frac{b}{a} = \frac{2c}{c^2 - 1}$.
If $a + ib = \frac{c+i}{c-i}$, where c is a real number, then prove that
(i) $a^2 + b^2 = 1$ (ii) $\frac{b}{a} = \frac{2c}{c^2 - 1}$. 2

11. यदि $\tan(\theta + i\phi) = \cos\alpha + i \sin\alpha$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\theta = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $n \in N$.
If $\tan(\theta + i\phi) = \cos\alpha + i \sin\alpha$, then prove that $\theta = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $n \in N$. 2

StudentBounty.com

12. सदिश $6\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ और $3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}$ दोनों के लम्बवत् इकाई सदिश ज्ञात कीजिए तथा दोनों दिये गए सदिशों के मध्य कोण भी ज्ञात कीजिए ।

Find unit vector perpendicular to the vectors $6\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ and $3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}$. Also find the angle between both the given vectors. 2

13. गोले का समीकरण $|\vec{r} - \vec{a}|^2 + |\vec{r} - \vec{b}|^2 = 72$ है, जहाँ $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ हो, तो गोले के केन्द्र के निर्देशांक और त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।

Equation of the sphere is $|\vec{r} - \vec{a}|^2 + |\vec{r} - \vec{b}|^2 = 72$, where $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$. Find radius and coordinates of the centre of the sphere. 2

14. एक कण पर क्रियाशील तीन बल संतुलन में हैं । यदि ये बल 3, 5, 7 के समानुपाती हैं, तो प्रदर्शित कीजिए कि बलों के मध्य कोण 60°, $\cos^{-1}\left(-\frac{13}{14}\right)$ तथा $\cos^{-1}\left(-\frac{11}{14}\right)$ हैं ।

Three forces acting on a particle are in equilibrium. If these forces are proportional to 3, 5, 7; then show that angles between them are 60°, $\cos^{-1}\left(-\frac{13}{14}\right)$ and $\cos^{-1}\left(-\frac{11}{14}\right)$. 2

15. N प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय है । यदि $N \times N$ पर कोई सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित हो कि $(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow ad = bc \; \forall \; (a, b), (c, d) \in N \times N$, तो सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता सम्बन्ध है ।

N is the set of natural numbers. If a relation R is defined on $N \times N$ as $(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow ad = bc \; \forall \; (a, b), (c, d) \in N \times N$, then prove that R is an equivalence relation. 3

16. यदि f तथा g दोनों $R \to R$ पर परिभाषित फलन हैं और यदि $f(x) = 3x + 4$ तथा $g \circ f(x) = 2x - 1$, तो फलन $g(x)$ ज्ञात कीजिए ।

If f and g are functions both defined on $R \to R$ and if $f(x) = 3x + 4$ and $g \circ f(x) = 2x - 1$, then find the function $g(x)$. 3

17. सरल रेखाएँ जिनकी दिक्कोज्याएँ $ul + vm + wn = 0$ तथा $al^2 + bm^2 + cn^2 = 0$ द्वारा दी जाती हैं । सिद्ध कीजिए कि यदि रेखाएँ समान्तर हैं, तो $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = 0$.

Direction cosines of straight lines are given by $ul + vm + wn = 0$ and $al^2 + bm^2 + cn^2 = 0$. Prove that if the lines are parallel then $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = 0$.

18. किसी सदिश $\vec{a}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि
$\hat{i} \times (\vec{a} \times \hat{i}) + \hat{j} \times (\vec{a} \times \hat{j}) + \hat{k} \times (\vec{a} \times \hat{k}) = 2\vec{a}$.

For any vector $\vec{a}$ prove that
$\hat{i} \times (\vec{a} \times \hat{i}) + \hat{j} \times (\vec{a} \times \hat{j}) + \hat{k} \times (\vec{a} \times \hat{k}) = 2\vec{a}$.

StudentBounty.com

19. यदि किसी कण पर, 2α कोण पर क्रियाशील दो समान बलों का परिणामी उन्हीं बलों के 2β कोण पर कार्य करने पर प्राप्त परिणामी का दो गुना हो, तब सिद्ध कीजिए कि $\cos \alpha = 2 \cos \beta$.

The resultant of two equal forces acting on a particle, when they are inclined at an angle 2α is double their resultant when inclined at an angle 2β. Then prove that $\cos \alpha = 2 \cos \beta$. 3

20. दो वेगों u तथा v के मध्य कोण θ है । यदि u और v की क्रिया रेखाएँ परस्पर बदल दी जायें तथा नया परिणामी वेग पहले परिणामी वेग के साथ α कोण बनाता है, तब सिद्ध कीजिए कि $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{u - v}{u + v} \tan \frac{\theta}{2}$.

The angle between two velocities of magnitude u and v is θ. If the lines of actions of u and v are interchanged, and the new resultant velocity makes an angle α with the first resultant velocity, then prove that $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{u - v}{u + v} \tan \frac{\theta}{2}$. 3

21. **यदि** $\cos \alpha + 2 \cos \beta + 3 \cos \gamma = 0 = \sin \alpha + 2 \sin \beta + 3 \sin \gamma$, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $\cos 3\alpha + 8 \cos 3\beta + 27 \cos 3\gamma = 18 \cos (\alpha + \beta + \gamma)$

(ii) $\sin 3\alpha + 8 \sin 3\beta + 27 \sin 3\gamma = 18 \sin (\alpha + \beta + \gamma)$.

अथवा

यदि $x_n = \cos \left(\frac{\pi}{2^n} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2^n} \right)$, सिद्ध कीजिए कि

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots \infty = -1$.

If $\cos \alpha + 2 \cos \beta + 3 \cos \gamma = 0 = \sin \alpha + 2 \sin \beta + 3 \sin \gamma$, then prove that

(i) $\cos 3\alpha + 8 \cos 3\beta + 27 \cos 3\gamma = 18 \cos (\alpha + \beta + \gamma)$

(ii) $\sin 3\alpha + 8 \sin 3\beta + 27 \sin 3\gamma = 18 \sin (\alpha + \beta + \gamma)$. 5

OR

If $x_n = \cos \left(\frac{\pi}{2^n} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2^n} \right)$, then prove that

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots \infty = -1$. 5

22. एक चर समतल मूलबिन्दु से स्थिर दूरी $3p$ पर रहता है तथा निर्देशांक अक्षों को A, B तथा C पर काटता है । प्रदर्शित कीजिए कि त्रिभुज ABC के केन्द्रक का बिन्दुपथ

$x^{-2} + y^{-2} + z^{-2} = p^{-2}$.

A variable plane is at a constant distance $3p$ from the origin and intersects the coordinate axes at A, B and C. Show that the locus of the centroid of the triangle ABC is

$x^{-2} + y^{-2} + z^{-2} = p^{-2}$. 5

StudentBounty.com

23. तीन बल P, Q तथा R किसी त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA तथा AB के अनुदिश क्रियाशील हैं । यदि इनका परिणामी त्रिभुज ABC के अन्त:केन्द्र तथा परिकेन्द्र से गुजरे तब सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{P}{\cos B - \cos C} = \frac{Q}{\cos C - \cos A} = \frac{R}{\cos A - \cos B}.$$

अथवा

एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजाओं AB, BC तथा CA के अनुदिश क्रमश: तीन बल P, $2P$ तथा $3P$ क्रियाशील हैं । इनके परिणामी का परिमाण तथा दिशा ज्ञात कीजिए और वह बिन्दु भी ज्ञात कीजिए जहाँ इसकी क्रिया रेखा BC को काटती है ।

Three forces P, Q and R act along the sides BC, CA and AB of a triangle ABC. If their resultant passes through the incentre and the circumcentre of the triangle ABC, then prove that

$$\frac{P}{\cos B - \cos C} = \frac{Q}{\cos C - \cos A} = \frac{R}{\cos A - \cos B} \qquad 5$$

OR

Three forces P, $2P$ and $3P$ act along the sides AB, BC and CA of an equilateral triangle ABC. Find the magnitude and direction of their resultant and also find the point in which its line of action meets the side BC. 5

24. यदि एक प्रक्षेप्य का क्षैतिज परास R तथा महत्तम ऊँचाई h हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि उसी प्रक्षेप वेग के लिए महत्तम क्षैतिज परास $2h + \frac{R^2}{8h}$ होता है, तथा सिद्ध कीजिए कि प्रक्षेप वेग $\sqrt{\left\{2g\left(h + \frac{R^2}{16h}\right)\right\}}$ है ।

अथवा

एक ही बिन्दु से दो गेंदें क्रमश: 30° तथा 60° के कोणों पर प्रक्षेपित की जाती हैं, तो उनके प्रक्षेप वेगों में अनुपात ज्ञात कीजिए जबकि

(i) क्षैतिज परास समान हो

(ii) प्राप्त महत्तम ऊँचाई एक ही हो ।

If R be the horizontal range and h be the greatest height of a projectile, show that the maximum horizontal range for the same velocity of projection is $2h + \frac{R^2}{8h}$. Also prove that the velocity of projection is $\sqrt{\left\{2g\left(h + \frac{R^2}{16h}\right)\right\}}$. 5

OR

Two balls are projected from the same point at angles of 30° and 60°. Find the ratio of their velocities of projection when

(i) the horizontal ranges are equal

(ii) the maximum heights attained are equal. 5